• $z = 1 + ie^{i\theta} = 1 + e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})} = e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}\left[e^{-i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})} + e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}\right]$

$= 2\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}$.

Or $\theta \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4} < \pi$

$\Rightarrow \cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}) < 0$

D'où $z = -2\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})(\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}+\pi)+i\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}+\pi))$

$= \left[-2\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}) \ ; \ \frac{\theta}{2}+\frac{5\pi}{4}\right]$

3/a- $\widehat{\left(\vec{u};\overrightarrow{BM}\right)}+\widehat{\left(\vec{u};\overrightarrow{BM'}\right)} \equiv \arg\left(\text{aff}\left(\overrightarrow{BM}\right)\right)+\arg\left(\text{aff}\left(\overrightarrow{BM'}\right)\right)$ $[2\pi]$

$\equiv \arg(z-1)+\arg(z'-1)$ $[2\pi]$

$\equiv \arg[(z-1)(z'-1)]$ $[2\pi]$

$\equiv \arg\left[(z-1)\left[\frac{z+1}{z-1}-1\right]\right]$ $[2\pi]$

$\equiv \arg\left[(z-1)\left(\frac{2}{z-1}\right)\right] \equiv \arg 2$ $[2\pi] \equiv 0$ $[2\pi]$

Ainsi $\widehat{\left(\vec{u};\overrightarrow{BM}\right)}+\widehat{\left(\vec{u};\overrightarrow{BM'}\right)} \equiv 0$ $[2\pi]$.

• $\text{aff}\left(\overrightarrow{BA}\right) = -1-1 = -2 \Rightarrow \overrightarrow{BA} = -2\vec{u}$.

• $\widehat{\left(\vec{u};\overrightarrow{BM}\right)}+\widehat{\left(\vec{u};\overrightarrow{BM'}\right)} \equiv 0$ $[2\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\vec{u};\overrightarrow{BA}\right)}+\widehat{\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BM}\right)}+\widehat{\left(\vec{u};\overrightarrow{BA}\right)}+\widehat{\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BM'}\right)} \equiv 0[2\pi]$

$\Leftrightarrow \pi+\widehat{\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BM}\right)}+\pi+\widehat{\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BM'}\right)} \equiv 0$ $[2\pi]$

$\Leftrightarrow -\widehat{\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BA}\right)} \equiv -\widehat{\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BM'}\right)}$ $[2\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BA}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BM'}\right)}$ $[2\pi]$

D'où [BA) est une bissectrice de $\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BM'}\right)$.

b- z' est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \overline{z'} = -z'$

$\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} = -\frac{z+1}{z-1} \Leftrightarrow \frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1} = -\frac{z+1}{z-1}$

$\Leftrightarrow (\overline{z}+1)(z-1) = -(z+1)(\overline{z}-1)$

$\Leftrightarrow z\bar{z}-\bar{z}+z-1 = -z\bar{z}+z-\bar{z}-1$

$\Leftrightarrow 2z\bar{z} = 2 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$

Ainsi z' est un imaginaire pur $\Leftrightarrow |z| = 1$.

c- Soit M(z) appartenant au cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1

• $OM = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow z'$ est un imaginaire pur